

## OPERADORES INTEGRALES Y SUS APLICACIONES AL PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

DANIEL SALVADOR<sup>1</sup>

**Resumen.** El análisis del kernel de un operador integral aumenta la precisión y aceleración del cálculo pues devela características comunes a varios operadores, sugiriendo unificación de métodos y reducción de recursos de procesamiento. Se estudian tres operadores: convolución, transformación rectopolar de Fourier y transformación wavelet. Sus aplicaciones a señales e imágenes incluyen regularización, detección de dirección, compresión y procesamiento en bandas, de gran utilidad en imágenes médicas, satelitales y geofísicas. Se busca la implementación de estos algoritmos en sistemas digitales de procesamiento de señales.

**Palabras clave.** Convolución, transformación rectopolar de Fourier, wavelets, bancos de filtros.

**1. Introducción.** La representación de una señal en otros dominios es útil para apreciar detalles ocultos en su dominio natural. Tal representación es obtenida por aplicación de un operador integral, el cual está caracterizado por su kernel en el sentido de Fredholm. La presente investigación muestra que el análisis del kernel favorece la optimización del cálculo en términos de precisión y aceleración, pues devela características comunes a varias transformaciones. Primero se destaca el aspecto de operador de una transformación para obtener una expresión analítica adecuada para su estudio e implementación. Luego se resalta lo común a varias transformaciones para unificar métodos. En sistemas digitales de procesamiento de señales, la unificación permite expresar cada módulo como combinación de operaciones eficientes, logrando reducción de recursos y aceleración de procesamiento.

La sección 2 presenta una introducción general a los operadores integrales discretos. Las secciones siguientes muestran tres aplicaciones. La sección 3 presenta el operador de convolución discreta. La sección 4 detalla un método de detección de dirección con transformación rectopolar de Fourier. La sección 5 muestra una aplicación a imágenes de la transformación wavelet. Finalmente, las conclusiones aparecen en la sección 6.

**2. Operador Integral Discreto.** Una ecuación integral de Fredholm de primera especie es una ecuación integral de la forma

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt, \quad (1)$$

donde  $K(x,t)$  es el kernel de integración y  $f(x)$ , la función desconocida. En este contexto, un operador integral  $T$  representa el proceso de transformar  $f(x)$  en  $\varphi(x) = (Tf)(x)$ , representado por

$$(Tf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y) f(y) dy. \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Grupo de Procesamiento Digital de Señales e Imágenes, Sección Electricidad y Electrónica. Maestría en Matemáticas, Sección Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú, Av. Universitaria cdra. 18 S/N, San Miguel, Lima 32, Perú, (511) 626 2000 ext. 4681 (salvador.cd@pucp.edu.pe).

La teoría de aproximación permite expresar  $T$  como un sistema lineal de infinitas variables, en efecto

$$(Au)_j = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{jk} u_k, \quad (3)$$

donde  $(u_k)$  es una aproximación de  $f$  y  $j \in \mathbf{Z}$ . De esta manera, el kernel de integración queda representado por una matriz infinita  $A$  de entradas  $a_{jk}$ . Siguiendo este modelo, veamos ahora tres aplicaciones: convolución, transformación de Fourier y transformación wavelet. En toda operación se buscará identificar el kernel para su estudio.

**3. Convolución.** El operador de convolución  $Q$  es un operador integral que asigna un número a cada traslape de dos funciones  $f$  y  $h$  según

$$(Qf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-y)f(y)dy, \quad (4)$$

donde identificamos el kernel como  $K(x, y) = h(x-y)$ .

La versión discreta de este operador es

$$(Au)_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{j-k} u_k, \quad (5)$$

donde  $(u_k)$  y  $(v_k)$  son las aproximaciones de  $f$  y  $h$  respectivamente, y la matriz de Toeplitz  $A$ , cuyas entradas son  $v_{j-k}$ , representa el kernel. Como el número de muestras de una señal es mucho mayor que el de un filtro, conviene tomar  $(v_k)$  como señal y  $(u_k)$  como filtro para evitar que la matriz  $A$  concentre sus elementos cerca de su diagonal, es decir, para reducir las multiplicaciones por cero. Además, para conservar el tamaño de la señal, conviene extender la señal periódicamente y efectuar una convolución circular.

**4. Transformación Rectopolar de Fourier.** La retícula rectopolar de la Figura 1b es una aproximación de la retícula polar de la Figura 1a en los siguientes sentidos: se conserva la dirección de los caminos de integración que pasan por el origen, la razón máxima entre distancias entre caminos cerrados (circunferencias y cuadrados) es igual a  $\sqrt{2}$ , la razón máxima entre variaciones de ángulos es menor o igual que 2, en ambas retículas la resolución aumenta cerca al origen, y una representación rectopolar se puede obtener interpolando muestras a partir de una representación cartesiana que contiene los mismos caminos cuadrados. A continuación veremos un método para calcular la transformación de Fourier en esta retícula rectopolar [1], [2] empleando la transformación fraccional de Fourier [3].

Primero definimos la transformación de Fourier continua de una función  $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$  por

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx. \quad (6)$$

Trabajaremos con funciones discretas (vectores) de longitud  $n$  (donde  $n = 2^p$ ,  $p$  entero). Denotamos el  $k$ -ésimo elemento de un vector  $u$  por  $u_k$  y centraremos los índices de los vectores alrededor de cero, en efecto,  $k \in \{-n/2, \dots, n/2-1\}$ . También definiremos la transformación de Fourier discreta (DFT) por

$$(Fu)_k = \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} u_j e^{-i2\pi jk/n}, \quad k = -n/2, -n/2+1, n/2-1. \quad (7)$$

Ahora podemos calcular la DFT con  $5n \log_2 n$  operaciones aritméticas usando la transformación rápida de Fourier (FFT) [4]. La transformación fraccional de Fourier (FRFT) queda definida por

$$(F_\alpha u)_k = \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} u_j e^{-i\alpha 2\pi jk/n}, \quad k = -n/2, -n/2+1, n/2-1, \alpha \in [-1, 1]. \quad (8)$$

La sustitución de Bluestein [5] convierte la FRFT en una operación de convolución implementada con tres FFT's, entonces puede ser calculada con  $20n \log_2 n$  operaciones. Para interpretar los resultados posteriores mencionaremos que La FRFT permite definir el operador de interpolación  $G = F^{-1} \circ F_\alpha$ ,

$$(Gu)_j = \sum_{k=-n/2}^{n/2-1} a_{jk} u_k, \quad a_{jk} = \sum_{l=-n/2}^{n/2-1} e^{-i\frac{2\pi}{n}(\alpha j-k)l}, \quad (9)$$

donde  $a_{jk}$  es el kernel. Este operador permite interpolar  $n$  muestras centrales de una señal tal como e muestra en la Figura 2.

Ahora definiremos la transformación rectopolar de Fourier (RPFT). La idea es ver la retícula rectopolar como una unión de dos subretículas como en la Figura 3.

En D1, primero se efectúa un relleno con ceros y se calcula la FFT en la dirección  $y$ , luego se calcula la FRFT en la dirección  $x$  con  $\alpha = (-j_1/n)$  decreciendo cerca del origen. La composición de todas las operaciones se denomina  $Z$ :

$$(Zu)_{(j_1, j_2)} = \frac{4}{n^2} \sum_{k_1=-n/2}^{n/2-1} e^{-i\frac{2\pi}{n/(-j_1/n)} j_2 k_1} \left\{ \sum_{k_2=-n/2}^{n/2-1} e^{-i\frac{2\pi}{2n} j_2 k_2} u_{(k_1, k_2)} \right\}_{(k_1, j_2)}, \quad (10)$$

$$(j_1, j_2) \in [-n/2, n/2-1] \times [-n, n-1].$$

En D2 se efectúan las mismas operaciones que en D1 pero intercambiando  $x$  e  $y$ , con  $\alpha = (-j_2/n)$  también decreciendo cerca al origen. La composición de todas las operaciones se denomina  $N$ :

$$(Nu)_{(j_1, j_2)} = \frac{4}{n^2} \sum_{k_2=-n/2}^{n/2-1} e^{-i\frac{2\pi}{n/(-j_2/n)} j_1 k_2} \left\{ \sum_{k_1=-n/2}^{n/2-1} e^{-i\frac{2\pi}{2n} j_1 k_1} u_{(k_1, k_2)} \right\}_{(j_1, k_2)}, \quad (11)$$

$$(j_1, j_2) \in [-n, n-1] \times [-n/2, n/2-1].$$

La RPFT de  $u$  es la concatenación de  $Zu$  y  $Nu$ .

En la Figura 4 aparece una imagen a) y su respectiva RPFT b). El rayo con inclinación 20 grados da la máxima suma permitiendo detectar la dirección de la línea en la imagen.

**5. Transformación Wavelet.** La resolución o escala es un parámetro fundamental del procesamiento visual pues la diferenciación entre variaciones de contorno y variaciones de texturas depende de ella. La idea intuitiva de análisis multiresolución proviene de aproximar una señal añadiendo sucesivamente detalles a una versión de baja resolución, es decir, refinándola sucesivamente. Una tarea en imágenes es obtener una representación que facilite la extracción de sus detalles a diferentes resoluciones. El análisis wavelet, formalizado sobre el concepto de análisis multiresolución [6], aparece como una herramienta natural para lograr esta tarea.

La Figura 5 ilustra esta idea para el caso de imágenes, en donde la idea de multiresolución aparece de modo natural. Una escena  $f(x)$  situada a una distancia  $d$  del lente de la cámara, forma una imagen continua  $A_0 f(x)$  en el plano focal de la cámara. Aquí  $A_0$  denota la operación por la cual se obtiene una imagen a una resolución de referencia  $2^0 = 1$ . Al alejarse la escena de la cámara una distancia igual al doble de la inicial, la escena es proyectada en un área igual a la cuarta parte de la imagen anterior, formando la imagen  $A_{-1} f(x)$  que es una proyección de la escena a una resolución  $2^{-1}$ .

Formalmente, una aproximación multiresolución es una secuencia  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de subespacios cerrados de  $L^2(\mathbb{R})$  con las siguientes propiedades:

$$V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

$$\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \text{ es denso en } L^2(\mathbb{R}) \text{ y } \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}, \quad (13)$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (14)$$

$$f(x) \in V_j \Rightarrow f(x - 2^{-j}n) \in V_j \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

$$\text{existe un isomorfismo } I \text{ de } V_0 \text{ en } l^2(\mathbb{Z}) \text{ que conmuta con la acción de } \mathbb{Z}. \quad (16)$$

En la propiedad (16), la acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $V_0$  es la traslación por enteros de funciones de variable real, mientras que la acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $l^2(\mathbb{Z})$  es la traslación usual de secuencias de dominio discreto.  $V_j$  es el espacio vectorial de todas las posibles aproximaciones de  $f(x)$  a la resolución  $2^j$ .

El operador  $A_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$  que aproxima una función a la resolución  $2^j$  es una proyección ortogonal en  $V_j$ . Para su caracterización numérica debemos encontrar una base ortonormal de  $V_j$ . Tal base puede ser definida dilatando y trasladando una única función  $\phi(x)$ , llamada función escala. En efecto, la familia de funciones  $(2^{j/2} \phi(2^j x - n))_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_j$ . La proyección ortogonal en  $V_j$  se

puede calcular ahora descomponiendo la función  $f(x)$  en la base ortonormal mencionada. En efecto,

$$(A_j f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{j,n} \phi(2^j x - n), \quad a_j = \left( 2^j (f(y) * \phi(-2^j y))(2^{-j} n) \right)_{n \in \mathbb{Z}} \quad (17)$$

donde  $(a_j)$  representa una aproximación discreta de  $f(x)$  a la resolución  $2^j$ . Como los ordenadores solo pueden procesar señales discretas, debemos trabajar con aproximaciones discretas. Cada producto puede ser interpretado como un producto de convolución evaluado en un punto discreto  $2^{-j} n$ . Veremos ahora que una operación de proyección es un operador integral, pues podemos escribirlo de la siguiente manera

$$(A_j f)(x) = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} K(2^j x, 2^j y) f(y) dy, \quad K(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(x - n) \phi(y - n), \quad (18)$$

existe entonces una relación lineal entre las aproximaciones  $a_j$  y  $a_{j+1}$  según

$$a_{j,n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{nm} a_{j+1,m}, \quad b_{nm} = \frac{1}{2} \langle \phi(y/2), \phi(y + 2n - m) \rangle. \quad (19)$$

Si definimos el filtro  $\tilde{H}$  con respuesta impulsiva  $\tilde{h}_n = h_{-n} = 0.5 \langle \phi(y/2), \phi(y + n) \rangle$ , el operador de submuestreo  $(\downarrow 2): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N/2}$  representado por la matriz con las filas pares de la matriz identidad, y el operador de convolución  $\tilde{H}: l^2(I_N) \rightarrow l^2(I_{N+L-1})$  representado por la matriz de diagonales constantes e iguales a los coeficientes del vector  $\tilde{h}$  de longitud  $L$ . Entonces la relación entre  $a_j$  y  $a_{j+1}$  se escribe

$$a_j = (\downarrow 2) \tilde{H} a_{j+1}. \quad (20)$$

Ahora veamos cómo calcular los detalles. Aplicando el teorema de proyección [7], se demuestra que el detalle a la resolución  $2^j$  es la proyección ortogonal de la señal original en el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ . Sea  $W_j$ , el espacio de todos los posibles detalles de  $f(x)$  a la resolución  $2^j$ , este complemento ortogonal. Para calcular la proyección de  $f(x)$  en  $W_j$  es necesaria una base ortonormal de  $W_j$ . Igual que para  $V_j$  tal base es definida dilatando y trasladando una única función  $\psi(x)$ . Se demuestra además que las secuencias de funciones  $\{2^{j/2} \psi(2^j x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  y  $\{2^{j/2} \psi(2^j x - n)\}_{(n,j) \in \mathbb{Z}^2}$  son respectivamente bases ortonormales de  $W_j$  y  $L^2(\mathbb{R})$ . En este contexto la función  $\psi(x)$  es una wavelet ortogonal.

Sea  $D_j: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow W_j$  el operador que calcula el detalle de una función  $f(x)$  a la resolución  $2^j$ . Este operador puede ser escrito

$$(D_j f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{j,n} \psi(2^j x - n), \quad d_j = \left( 2^j (f(y) * \psi(-2^j y))(2^{-j} n) \right)_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (21)$$

Podemos probar por inducción que para cualquier  $J > 0$ , la señal discreta original  $a_0$ , medida a la resolución 1 está representada por  $(a_{-J}, d_{-J}, d_{-J+1}, \dots, d_{-1})$ .

Conviene ahora definir el filtro  $\tilde{G}$  con respuesta impulsiva  $\tilde{g}_n = g_{-n} = 0.5\langle\psi(y/2), \phi(y+n)\rangle$ , de modo que la relación anterior es ahora

$$d_{j,n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{2^{j+1}n-m} a_{j+1,m}, \quad (22)$$

es decir, podemos calcular  $d_j$  convolucionando  $a_{j+1}$  con  $\tilde{G}$  y realizando una operación de submuestreo sobre este resultado. Además, empleando los operadores definidos para la representación de aproximación, la relación entre  $d_j$  y  $a_{j+1}$  queda determinada por la expresión matricial

$$d_j = (\downarrow 2)\tilde{G}a_{j+1}. \quad (23)$$

En la práctica,  $a_0$  es un vector de  $l^2(I_N)$  de longitud  $N$  y los detalles  $d_j$  son vectores de longitud  $2^j N$  también miembros de  $l^2(I_{2^j N})$ . La representación wavelet ortogonal de una señal discreta  $a_0$  puede por lo tanto ser calculada por descomposición sucesiva de  $a_{j+1}$  en  $a_j$  y  $d_j$  para  $-J \leq j \leq -1$ . Este algoritmo se ilustra la Figura 6a.

La señal discreta original también se reconstruye con un algoritmo piramidal. Como  $W_j$  es el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ ,  $(2^{j/2}\phi(2^j x - n), 2^{j/2}\psi(2^j x - n))_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_{j+1}$ , entonces la función  $2^{j+1}\phi(2^{j+1}x - n)$  puede ser descompuesta en esta base. Siguiendo el teorema de la aproximación se obtiene una relación lineal entre las aproximaciones a las resoluciones sucesivas  $2^j$  y  $2^{j+1}$

$$a_{j+1,n} = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{mn} a_{j,m} + 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{mn} d_{j,m}, \quad (24)$$

donde los coeficientes  $b_{mn}$  y  $c_{mn}$  son los definidos en el proceso de descomposición. Esta relación se puede escribir como el producto matricial

$$a_{j+1} = 2(B^T a_j + C^T d_j), \text{ donde } B^T = [b_{mn}] \text{ y } C^T = [c_{mn}]. \quad (25)$$

Si usamos los filtros  $H$  y  $G$  con respuestas impulsivas  $h_n = 0.5\langle\phi(y/2), \phi(y-n)\rangle$ ,  $g_n = 0.5\langle\psi(y/2), \phi(y-n)\rangle$  respectivamente, entonces escribimos

$$a_{j+1,n} = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{n-2m} a_{j,m} + 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{n-2m} d_{j,m}. \quad (26)$$

Además, si  $B^T = H(\uparrow 2)$  y  $C^T = G(\uparrow 2)$ , donde  $(\uparrow 2)$  es el operador de sobremuestreo representado por la con las columnas pares de la matriz identidad, y  $H$  y  $G$  son operadores de convolución representados por matrices cuyas diagonales son constantes e iguales a los coeficientes de  $h$  y  $g$  respectivamente, entonces la relación entre  $a_j$  y  $a_{j+1}$  queda determinada en la siguiente expresión

$$a_{j+1} = 2 \begin{bmatrix} H(\uparrow 2) & G(\uparrow 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ d_j \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Se observa que  $a_{j+1}$  se puede reconstruir haciendo una operación de sobremuestreo o inserción de ceros entre muestras sobre las señales discretas  $a_j$  y  $d_j$ , y convolucionando las señales resultantes con los filtros  $H$  y  $G$ , respectivamente. La Figura 6b ilustra este algoritmo.

Finalmente, la señal discreta original  $a_0$  a la resolución 1 se reconstruye repitiendo este procedimiento para  $-J \leq j \leq -1$ . A partir de la aproximación discreta  $a_0$ , podemos recuperar la aproximación continua  $A_0 f(x)$  calculando

$$A_0 f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{0,n} \phi(x-n). \quad (28)$$

El esquema de cálculo de la Figura 6 no es el más óptimo pues en el análisis hay productos de convolución que son descartados por la operación de submuestreo, y en la síntesis se realizan multiplicaciones por cero debido al sobremuestreo antes del filtro. Una forma de superar este inconveniente es operar con las fases de cada filtro por separado [8], [9]. La aplicación sucesiva de  $M$  bloques de análisis a las aproximaciones resultantes es la transformación Wavelet de  $M$  niveles. La aplicación sucesiva de  $M$  bloques de síntesis a las respectivas aproximación y detalle es la transformación Wavelet Inversa de  $M$  niveles (Figura 8). Finalmente, la extensión de este algoritmo a dos dimensiones es directa cuando se emplean funciones wavelet separables, entonces bastará con aplicar la transformación wavelet directa a todas las columnas y luego a las filas de este resultado. La Figura 9 muestra una descomposición wavelet de un nivel de una imagen. En la esquina superior izquierda apreciamos la aproximación y a su derecha el detalle vertical; debajo, en el mismo orden, apreciamos los detalles horizontal y diagonal.

**6. Conclusiones.** El kernel de los operadores integrales tratados en este documento presenta la característica común de linealidad y se pueden factorizar en transformaciones de Fourier, permitiendo utilizar el algoritmo de la FFT. En sistemas digitales de procesamiento de señales, con el fin de reducir los módulos a implementar y acelerar el procesamiento, es útil expresar cada operación en función de transformaciones rápidas de Fourier (FFT). A veces es más sencillo expresar primero tales operaciones como convoluciones y luego usar la FFT. De esta manera el problema queda convertido en el diseño del filtro adecuado. Estas son algunas de las razones por las cuales el cálculo de la FFT y el diseño de filtros son los pilares del procesamiento de señales. En futuros trabajos se verá el acondicionamiento de estos algoritmos para tecnología de ejecución SSE2 de la microarquitectura NetBurst del Pentium 4 y lenguajes de descripción de hardware para su implementación en FPGA's (matriz de compuertas digitales programable), con los respectivos análisis de error.

## REFERENCIAS

- [1] A. Averbuch, R. Coifman, D. Donoho, Moshe Israeli y J. Waldén, "The Pseudopolar FFT and its applications", *Research Report YALEU/DCS/RR-1178*, 1999.
- [2] A. Averbuch, R. Coifman, D.L. Donoho y M. Israeli, "Fast Slant Stack: A Notion of Radon Transform for Data in a Cartesian Grid which is Rapidly Computible, Algebraically Exact, Geometrically Faithful and Invertible," to appear in *SIAM Scientific Computing*.
- [3] D. Bayley y P. Swarztrauber, "The fractional Fourier transform", *SIAM Review*, Vol. 33., No. 3, pp. 389-404, Setiembre 1991.
- [4] J. Cooley y J. Tukey, "An algorithm for the machina calculation of complex Fourir series", *Math. Comput.* vol. 19, pp. 297-301, 1995.
- [5] L. Rabiner, C. Rader y R. Schafer, "The Chirp z-Transform Algorithm and its Applications", *Bell System Technical Journal*, vol. 48, 1969, pp. 1249 - 1292.
- [6] S. Mallat, "Multiresolutions aproximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ ", *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 315, No. 1, pp. 69-87, Setiembre 1989.
- [7] S. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", *IEEE Trans. on Pattern Recognition and Machine Intelligence*, Vol. 11, No. 7, pp. 674-692, Julio 1989.
- [8] P.P. Vaidyanathan. *Multirate systems and filter banks*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1993.
- [9] T. Nguyen y G. Strang. *Wavelets and filter banks*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Ma., 1996.

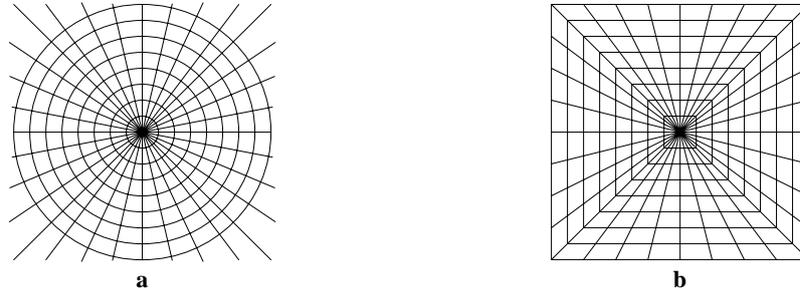


FIG. 1. Retícula polar a) y retícula rectopolar b).

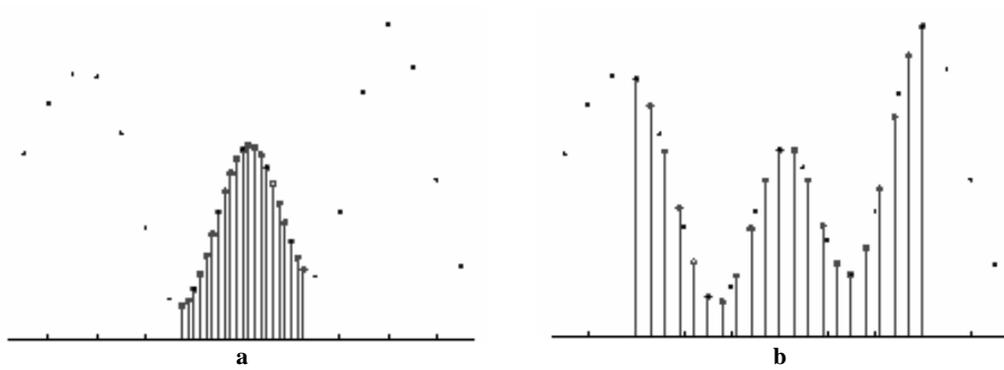


FIG. 2. Acción del operador de interpolación  $G$  con  $\alpha = 0.25$  a) y  $\alpha = 0.5$  b).

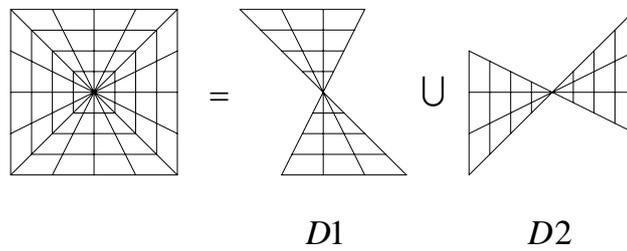


FIG. 3. Retículas rectopolar vista como unión de dos retículas.

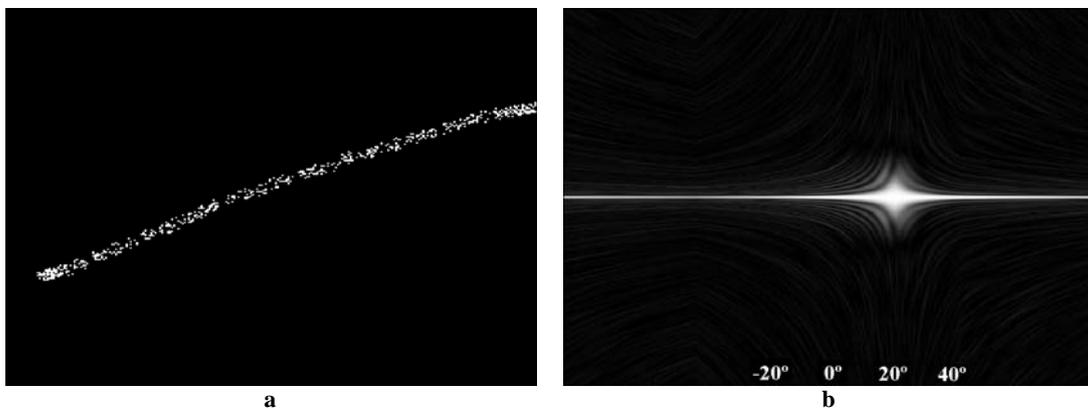


FIG. 4. Detección de dirección con la transformación Rectopolar de Fourier.

